

小波变换及在图象处理中的小波特性分析

张 晔 黄秀明

(哈尔滨工业大学电子与通信工程系, 哈尔滨 150001)

摘 要 小波变换是近几年发展起来的集数学、科学计算及信号处理于一体的新理论,其核心是多分辨率分析。本文全面综述了小波变换作为多分辨率图象处理新工具的发展过程、小波变换的定义、信号/图象的多分辨率小波分解及图象多分辨率分解所表现的多尺度特性、局部化分析特性及方向选择性等。

关键词 小波变换, 图象处理, 多分辨率分析

1 引 言

小波(Wavelet)变换作为一种新的数学工具,在图象处理及模式识别中起着重要作用,其应用范围从图象增强、数据压缩到边缘检测、纹理分析和分割等不同领域^[1~4]。小波变换的核心是多分辨率分解,其理论体系起源于60年代人类对视觉系统和心理学的研究。70年代末到80年代初,多分辨率金字塔(Pyramid)分解及正交镜像滤波器 QMF (Quadrature Mirror Filter)的引入,使它得到迅速发展。可以说,小波变换多分辨率分解方法的思想源于金字塔分解技术,但它克服了金字塔分解的不足,而在算法上类似于 QMF 算法,但它又避免了 QMF 的设计困难,是一种较完善的金字塔多分辨率分解方法和 QMF 算法的统一^[3,4]。

小波变换的固有特性,使它在信号处理,特别是在图象处理中表现出以下优点:(1)小波变换的完善重建能力,保证了信号在分解过程中没有任何信息损失、没有任何冗余信息,即小波变换作为一组表示信号分解的基函数是唯一的;(2)小波变换把图象分解成逼近图象和细节图象之和,它们分别代表了图象的不同结构,因此原始图象的结构信息和细节信息很容易提取;(3)小波变换具有快速算法——Mallat 算法,它在小波变换中的作用相当于 FFT 在

Fourier 变换中的作用,这为小波变换的应用提供了必要手段;(4)二维小波分解,为图象的分析提供了方向选择性,这种方向选择性非常适合于人眼的视觉系统特性,也就是说,小波变换的方向选择性恰与人类视觉系统的方向性相吻合。

2 小波变换及信号多分辨率分解

连续小波基是由一个原型小波函数 $\psi(t)$ 作平移和尺度(Scale)得到的,对于平移和尺度因子分别为 τ 和 a ,连续小波基定义为:

$$\Psi_{\tau,a}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \Psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) \quad (a > 0) \quad (1)$$

式中 $1/\sqrt{|a|}$ 为能量归一化因子。这样对于任意信号 $f(t) \in L^2(R)$,连续小波变换定义为:

$$CWT(\tau,a) = \langle f(t), \Psi_{\tau,a}(t) \rangle \quad (2)$$

在实际应用中,常对时间—尺度参数 (τ,a) 进行离散化,参数 a 一般取一个固定尺度参数 $a_0 > 1$ 的整数幂,平移因子 τ 也依赖于此,即

$$a = a_0^j, \tau = n\tau_0 a_0^j, \tau_0 > 0, j, n \in Z \quad (3)$$

这样,小波基函数变为:

$$\Psi_m(t) = a_0^{-j/2} \Psi(a_0^{-j}t - n\tau_0) \quad (4)$$

更有应用价值的是选择 $a_0 = 2, \tau_0 = 1$,此时小波基函数为:

$$\Psi_m(t) = 2^{-j/2} \Psi(2^{-j}t - n) \quad (5)$$

称为二进小波。在多分辨率分析意义下,根据二进小波,可以得出以下结论:

(1) 对任意 $j \in Z$, 函数基 $\{\phi_m(t) = 2^{-j/2} \phi(2^{-j}t - n)\}_{n \in Z}$ 构成 V_j 的标准正交基, 函数 $\phi(t)$ 称为尺度函数, 具有低通滤波的作用, 且满足双尺度方程;

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)\phi(2t - n) \quad (6)$$

式中 $h(n) = \langle \phi(t), \phi_{-ln}^{(l)} \rangle$ 。

(2) 在 V_j 正交补空间 W_j 中, 函数基 $\{\Psi_m(t) = 2^{-j/2} \Psi(2^{-j}t - n)\}_{n \in Z}$ 构成 W_j 标准正交基, 函数 $\Psi(t)$ 称为小波函数, 具有高通滤波的作用, 并满足

$$\Psi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n)\phi(2t - n) \quad (7)$$

式中 $g(n) = (-1)^n h(1-n)$ 。 $h(n)$ 和 $g(n)$ 称为正交镜像滤波器。这样在分辨率 2^{-j} 下信号 $f(t)$ 可用离散逼近信号 S_j 和逼近误差信号 D_j 来表征, 其迭代算法分别为:

$$S_j = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(2n - k) S_{j-1} \quad j = 1, 2, 3 \dots \quad (8)$$

$$D_j = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(2n - k) S_{j-1} \quad j = 1, 2, 3 \dots \quad (9)$$

该算法称为小波分解的树状算法。

在信号的重建过程中, 由于小波表示的完备性, 可以用类似分解的树状算法重建原始信号, 此时

$$S_{j-1} = 2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(n - 2k) S_j + 2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(n - 2k) D_j \quad (10)$$

在图象处理中, 二维空间 V_j 一般设为可分离的, 这样尺度函数也是可分离的。不同的是空间 W_j 分解成 3 个正交子空间 $W_{1,j}, W_{2,j}$ 和 $W_{3,j}$, 相应的小波函数为 $\Psi_1(x, y), \Psi_2(x, y), \Psi_3(x, y)$, 它们分别对应二维平面的 3 个方向: 水平、垂直和 45° 或 135° 方向。 $f(x, y)$ 在分辨率 2^{-j} 下可用逼近图象 S_j 和对应的细节图象 $D_{1,j}, D_{2,j}, D_{3,j}$ 来表示, 在算法实现上, 二维图象的小波分解可用类似于-一维的树状算法来实现。在每一层分解中, S_{j-1} 被分解成 $S_j, D_{1,j}, D_{2,j}$ 和 $D_{3,j}$ 。小波的重建算法同样可以应用到图象中, 此时, 图象 S_{j-1} 由 $S_j, D_{1,j}, D_{2,j}$ 和 $D_{3,j}$ 重建生成。

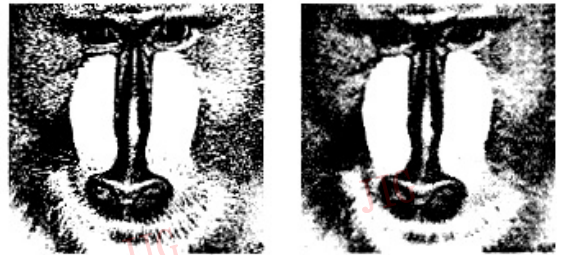
3 图象的小波特性

为了理解小波变换在图象处理中的应用, 现以 3 阶 B-样条小波基对图象分解为例, 研究小波变换

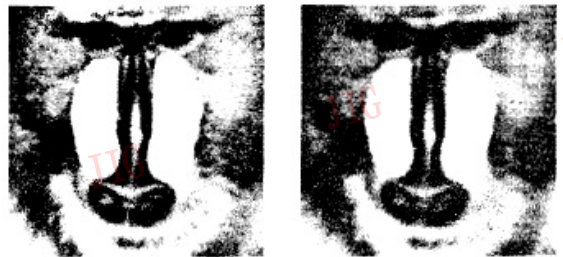
在图像多分辨率分析与处理中所表现的基本特性。

3.1 多分辨率特性

为了说明图象在不同分辨率或不同尺度下所表现的不同特性, 我们以图 1 为例来讨论。图 1(a) 是原始图象, 图象大小为 256×256 象素, 每个象素为 8bit, 其分辨率和尺度为 1。图 1(b)~图 1(d) 是对图 1(a) 在分辨率分别为 $1/2 \sim 1/8$ 时小波分解的结果 (为了视觉方便, 图象尺度保持不变)。可见, 在不同分辨率图象所表现的特性是不同的, 在高分辨率主要集中在图象的细节特征上, 而在低分辨率主要集中在图象的宏观结构上, 这样为了研究某些图象, 人们有必要利用不同的分辨率, 根据所用的分辨率来全面描述图象。



(a) 原始图象 (256×256) (b) 1/2 分辨率小波分解



(c) 1/4 分辨率小波分解 (d) 1/8 分辨率小波分解

图 1 不同分辨率所表现的不同特性

Fig. 1 Different characteristics expressed by different resolution.

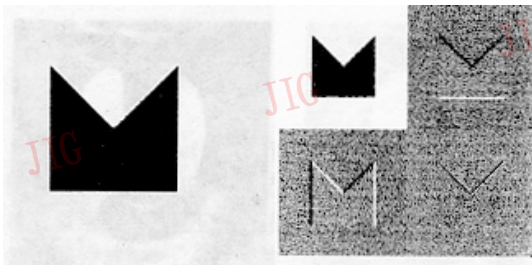
3.2 方向选择性

我们知道, 二维小波分解可以理解为图象在一组独立的、具有空间方向性的频道上的分解。其中, 图象 S_j 对应于最低频率成份, 相当于对原图象的低通滤波; $D_{1,j}$ 给出垂直方向高频成份和水平方向的低频成分, 即 0° 方向信息; $D_{2,j}$ 给出水平方向的高频成份和垂直方向的低频成分, 即 90° 方向信息; $D_{3,j}$

给出对角或反对角方向的高频成份,即 45° 或 135° 方向信息。图 2 示出了在白背景中的黑方块的分解图,由图可以非常清楚地看出小波分解的方向性。

3.3 局部分析特性

小波变换的局部分析特性主要表现为一种提取图象边缘的能力。根据边缘检测理论,图象局部化特性由图 2 也可以清楚的看出,在小波分解的子图象(图 2(b))中, $D_{1,j}$ 给出水平边缘(垂直方向的高频成份)信息; $D_{2,j}$ 给出垂直边缘(水平方向的高频成份)信息; $D_{3,j}$ 给出对角或反对角边缘(45° 或 135° 方向的高频成份)信息。因此在具体应用中,我们可以根据具体要求,通过 $D_{1,j}$ 、 $D_{2,j}$ 和 $D_{3,j}$ 提取不同的图象边缘信息。



(a) 原始图象 (b) 小波分解图象

图 2 白背景中黑方块的分解

Fig. 2 Black square separated from white background.

3.4 误差分布及视觉特性

设 $[S_j, (D_{1,j}, D_{2,j}, D_{3,j}), 1 \leq j \leq J]$ 是图象 S_0 的小波表示, $[\epsilon_j, (\epsilon_{1,j}, \epsilon_{2,j}, \epsilon_{3,j}), 1 \leq j \leq J]$ 是对小波表示图象处理时引进的均方误差, ϵ_0 为由小波表示重建图象的总的均方误差,由于小波表示在 $L^2(R^2)$ 中是正交的,可以证明

$$\epsilon_0 = 2^{2J} \epsilon_J + \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^J 2^{2j} \epsilon_{k,j} \quad (11)$$

可见,不同的层数对系统的总误差的影响是不同的,层数越高,误差影响越大。根据该特性,我们在应用小波变换处理图象时可合理分配误差的分布。

根据小波分解的子图象 $D_{1,j}$ 、 $D_{2,j}$ 和 $D_{3,j}$,考虑视觉特性(水平、垂直及对角)对系统质量的影响。不同 $D_{k,j}$ 对恢复图象质量的影响结果如图 3 所示。图 3 (a)是对每个频道 $D_{1,j}$ 、 $D_{2,j}$ 和 $D_{3,j}$,都考虑时的恢复图象;图 3 (b)是只考虑频道 $D_{2,j}$ 和 $D_{3,j}$ 而不考虑频道 $D_{1,j}$ 时的恢复图象;图 3 (c)是考虑频道 $D_{1,j}$ 和 $D_{3,j}$,而不考虑频道 $D_{2,j}$ 时的恢复图象;图 3 (d)是考

虑频道 $D_{1,j}$ 和 $D_{2,j}$,而不考虑频道 $D_{3,j}$ 时的恢复图象。由图 3 可见水平分量 $D_{1,j}$ 和垂直分量 $D_{2,j}$ 在视觉上对恢复图象质量影响较大,而对角分量 $D_{3,j}$ 在视觉上对图象的主观质量影响相对小些。因此在应用中,如果人类视觉系统越敏感,在细节图象 $D_{k,j}$ 中我们将引入越少的误差。



(a) 考虑水平、垂直、对角 (b) 考虑垂直、对角



(c) 考虑水平、对角 (d) 考虑水平、垂直

图 3 图象方向及局部特性对图象质量的影响

Fig. 3 Image quality was affected by its direction and local characteristic.

4 结束语

小波分析的概念和发展来源于 Fourier 分析,它是较 Fourier 变换在信号与图象处理中更一般的工具,通过实验可见,在图象处理中小波变换所表现的独有特性是 Fourier 分析无法比拟的。必须指出,它不能完全代替 Fourier 分析,在信号与图象处理中,它与 Fourier 分析的有效结合,取长补短,必将为信号与图象处理开辟新途径、提供新方法。

参考文献

- 1 Chang T, Kuo C C J. Texture Analysis and Classification with Tree-Structured Wavelet Transform. IEEE Trans. on IP, 1993. 10, 2(4): 429~441.
- 2 Xu Y, Weaver J B. Wavelet Transform Domain Filters: A Spatially Selective Noise Filtration Technique. IEEE Trans. on IP, 1994. 11, 3(6): 747~758.
- 3 Mallat S. Multifrequency Channel Decomposition of Images and Wavelet Models. IEEE Trans. on ASSP, 1989. 37(12): 209~

2110.

the Wavelet Representation. IEEE Trans. on PAMI, 1989. 6, 11
(7):674~693.

4 Mallat S. A Theory for Multiresolution Signal Decomposition:



张晔, 哈尔滨工业大学电子与通信工程系信息工程教研室主任、博士、副教授, 长期从事信号与信息处理的教学与科研工作, 曾先后组织并参加了科研项目 10 余项, 发表科技论文 20 余篇, 获航天工业总公司科技进步一、二、三等奖各一项。主要感兴趣领域包括小波变换技术、多媒体应用、纹理图象分析、自动目标识别、图象数据压缩与传输、遥感图象处理等。

Wavelet Transform and Its Characteristics Analysis in Image Processing

Zhang Ye, Huang Xiuming

(Dept. of Electrical and Communication Engineering, Haerbin Institute of Technology, Haerbin 150001)

Abstract Wavelet transform is a new powerful tool developed in recent years, which includes mathematics, scientific computation and signal processing. Its key is multiresolution analysis. This paper completely reviews the process of the wavelet development as multiresolution tool, definition of wavelet transform, wavelet decompositions of signals and images, and the multiscale, local time-frequency and orientation characteristics of multiresolution image decomposition and so on.

Keywords Wavelet transform, Image processing, Multiresolution analysis

(上接 477 页)



王仁生, 哈尔滨工业大学航天学院硕士研究生。1995 年于哈尔滨工业大学电子与通信工程系获学士学位, 现在信号与信息处理专业攻读硕士学位。主要研究方向为空间遥感图象中目标特征提取, 目标自动识别等。

A Study on Detecting Man-made Objects from Natural Background in Space Sensing Imagery

Wang Rensheng, Jia Xiaoguang, Zhou Jianlin

(Dept. of Astronautic Electronics & Opto-Electronic Engineering, Haerbin Institute of Technology, Haerbin 150001)

Abstract An algorithm for detecting man-made objects from natural background in space sensing imagery is presented by applying multi-resolution analysis based on the wavelet transform and features fusion technique. Experimental results on SAR images have shown that the algorithm is effective and applicable.

Keywords Object detection, Multi-resolution analysis, Features fusion, Wavelet transform